

DS de mathématiques n°5

Continuité, dérivation, convexité, relations,

arithmétique – Corrigé

Noté sur 110 pts ± 5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par $1/5$.

/18,5 1 Pour s'échauffer

Les questions 1) et 2) de cet exercice sont indépendantes.

- 1) a) Déterminer le PGCD de 56 et de 99, ainsi qu'un couple de coefficients de Bézout. Si ces coefficients n'ont pas été trouvés, on pourra les noter u et v pour la question suivante.

/3,5

On applique l'algorithme d'Euclide étendu :

$$99 = 1 \times 56 + 43$$

$$56 = 1 \times 43 + 13$$

$$43 = 3 \times 13 + 4$$

$$13 = 3 \times 4 + 1$$

Le dernier reste non nul est 1, donc $56 \wedge 99 = 1$. De plus :

	99	56
$43 = 99 - 56$	99	1
$13 = 56 - 43$	56	0
$4 = 43 - 3 \times 13$	43	1
$1 = 13 - 3 \times 4$	13	-1
	4	2
	4	-7
	1	-13
		23

Ainsi, $56 \times 23 + 99 \times (-13) = 1$. On en déduit qu'un couple de coefficients de Bézout est $(23, -13)$.

- /4 b) En déduire les solutions de $56x + 99y = 1$.

En passant l'égalité modulo 99, on a

$$56x \equiv 1 \pmod{99}$$

On cherche donc un inverse de 56 modulo 99 (qui existe car $56 \wedge 99 = 1$). Or, comme $56 \times 23 + 99 \times (-13) = 1$, on a

$56 \times 23 \equiv 1 \pmod{99}$. Ainsi, on obtient

$$56x \equiv 1 \pmod{99} \iff x \equiv 23 \pmod{99}$$

de sorte que $x = 23 + 99k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} 56 \times (23 + 99k) + 99y &= 1 \\ \iff 99y &= 1 - 56 \times 23 - 56 \times 99k \\ \iff 99y &= 99 \times (-13) - 56 \times 99k \\ \iff y &= -13 - 56k \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que $(x, y) = (23 + 99k, -13 - 56k)$. (Réciproquement, on vérifie que ces couples conviennent car en passant l'égalité modulo 99 on a perdu l'équivalence avec l'équation diophantienne initiale). Finalement :

$$S = \left\{ (23 + 99k, -13 - 56k) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 2) On note f la fonction définie par $f(x) = \ln \left(\frac{x}{1+x} \right)$.

/2

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

(Attention à ne pas réécrire $f(x)$ en $\ln(x) - \ln(1+x)$! Cela n'est possible que si $x > 0$ et $1+x > 0$!)

On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	-1	0	0	$+\infty$
x		-	-			+
$1+x$		-		+		+
$\frac{x}{1+x}$		+		-		+

(le tableau ne l'affiche pas, mais il y a un zéro en 0 à la dernière ligne)

On en déduit que $\frac{x}{1+x} > 0 \iff x < -1$ ou $x > 0$. Finalement

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

/3

- b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée et quotient de telles fonctions. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \ln x - \ln(1+x)$$

donc

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-(1+x)^2 + x^2}{x^2(1+x)^2} \\ &= \frac{-2x-1}{x^2(1+x)^2} < 0 \end{aligned}$$

Donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n + \sum_{i=1}^n x_i} \right)^n \geq$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i}$$

On reformule d'abord l'inégalité voulue :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n + \sum_{i=1}^n x_i} \right)^n &\geq \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i} \\ \Leftrightarrow \ln \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n + \sum_{i=1}^n x_i} \right)^n \right) &\geq \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i} \right) \end{aligned}$$

par croissance de $\ln$. Cela équivaut donc à

$$\begin{aligned} n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n + \sum_{i=1}^n x_i} \right) &\geq \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i}{1+x_i} \right) \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n + \sum_{i=1}^n x_i} \right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i}{1+x_i} \right) \quad (*) \end{aligned}$$

(On reconnaît $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ à droite... C'est le moment de « Jenseniser »). Par l'inégalité de Jensen appliquée à f , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) &\leq f \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i}{1+x_i} \right) &\leq \ln \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i}{1+x_i} \right) &\leq \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n + \sum_{i=1}^n x_i} \right) \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité correspond bien à (*). D'où le résultat.

2 Fonctions absolument monotones

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction f est dite *absolument monotone* si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]a, b[\quad f^{(n)}(x) \geq 0$$

/19 **Partie A – Généralités**

- 1) Justifier que toute application absolument monotone est positive, croissante et convexe. Donner un exemple d'application absolument monotone décroissante.

/2,5

Si f est absolument monotone, alors f, f', f'' sont positives, donc f est positive, croissante et convexe.

La fonction $\boxed{f : x \mapsto 0}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = 0$. En particulier, $f^{(n)}$ est positive. Ainsi, f est absolument monotone. De plus, f est constante donc décroissante. f convient donc comme exemple.

- 2) Soit f et g deux fonctions absolument monotones sur $]a, b[$. Montrer que $f + g$ et fg le sont aussi.

/5,5

La fonction $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$ car f, g le sont et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]a, b[\quad (f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$

Ainsi, $f + g$ est absolument monotone.

De même, fg est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$ comme produit de telles fonctions. De plus, par la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [a, b] \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Or, f, g étant absolument monotones, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $f^{(k)}(x) \geq 0$ et $g^{(n-k)}(x) \geq 0$. Comme $\binom{n}{k} \geq 0$ on a donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \geq 0$$

On en déduit que $(fg)^{(n)}(x)$ est positive, si bien que fg est absolument monotone.

- 3) Dans la suite, on note e^f l'application $x \mapsto e^{f(x)}$. Justifier que e^f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $(e^f)'$.

/1,5

e^f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composée de telles fonctions. De plus, on a :

$$(e^f)' = (\exp \circ f)' = (\exp \circ f) \times f' = f' e^f$$

- 4) En utilisant une récurrence forte et le fait que $(e^f)^{(n+1)} = ((e^f)')^{(n)}$, montrer que si f est absolument monotone sur $]a, b[$, alors e^f l'est aussi.

/6

Soit f absolument monotone sur $]a, b[$. Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que $(e^f)^{(n)} \geq 0$ sur $]a, b[$.

Pour $n = 0$, on a $(e^f)^{(0)} = e^f$ et pour tout $x \in]a, b[$ on a bien $e^{f(x)} \geq 0$ car l'exponentielle est positive.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $(e^f)^{(k)}$ soit positive pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrons que $(e^f)^{(n+1)}$ l'est aussi. On a :

$$\begin{aligned} (e^f)^{(n+1)} &= ((e^f)')^{(n)} \\ &= (e^f f')^{(n)} \quad \text{par la question 3} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^f)^{(k)} (f')^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^f)^{(k)} f^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $(e^f)^{(k)}$ est positive pour tout $k \leq n$. De plus comme f est absolument monotone, on a également $f^{(n+1-k)} \geq 0$. Ainsi, $(e^f)^{(n+1)} \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: la fonction e^f est absolument monotone.

- 5) En déduire que la fonction $\varphi : x \mapsto e^{1+2x+3x^2}$ est absolument monotone sur $]0, 1[$.

/3,5

Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que polynôme. De plus, comme $x > 0$, on a $f(x) \geq 0$. Par ailleurs, on a $f'(x) = 2 + 6x$, ce qui est positif, et $f''(x) = 6$, ce qui est aussi positif. Enfin, pour tout $n \geq 3$, on a $f^{(n)}(x) = 0$ donc est positif. Ainsi, f est absolument monotone. Comme $\varphi = e^f$, on

en déduit que φ est absolument monotone par ce qui précède.

Partie B – La fonction arcsinus est absolument monotone sur

/22

6) On pose $u : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$

$$u^{(n)}(x) = \alpha_n \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

/5

où α_n est un réel qui dépend de n que l'on précisera.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $1-x \neq 0$ donc u est définie sur $]0, 1[$. Comme u est une fonction rationnelle, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ là où elle est définie donc en particulier sur $]0, 1[$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall x \in]0, 1[\quad u^{(n)}(x) = n! \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

Pour $n = 0$, on a bien que pour tout $x \in]0, 1[$, $u^{(0)}(x) = u(x) = \frac{1}{1-x} = 0! \frac{1}{(1-x)^{0+1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie au rang n . Montrons-la au rang $n+1$. Pour tout $x \in]0, 1[$, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u^{(n+1)}(x) &= (u^{(n)})'(x) \\ &= n! \left(-\frac{(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2(n+1)}} \right) \\ &= n! \frac{(n+1)}{(1-x)^{n+2}} \\ &= (n+1)! \frac{1}{(1-x)^{n+2}} \end{aligned}$$

Ainsi, la formule est vraie au rang $n+1$. Finalement, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\alpha_n = \boxed{n!}$.

7) Donner sans justification une formule pour $v^{(n)}(x)$, où $v : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

/2

La formule recherchée est :

$$v^{(n)}(x) = \boxed{(-1)^n n! \frac{1}{(1+x)^{n+1}}}$$

8) En déduire que l'application $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

/6

est absolument monotone sur $]0, 1[$.

On a $g = u - v$. Par les questions 6 et 7, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$ car u et v le sont, et pour tout $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= u^{(n)}(x) - v^{(n)}(x) \\ &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \\ &= n! \left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Montrons que g est absolument monotone sur $]0, 1[$. Résolvons l'inéquation $g^{(n)}(x) \geq 0$ avec $0 < x < 1$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &\geq 0 \\ \iff \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} &\geq 0 \quad \text{car } n! > 0 \\ \iff \frac{1}{(1-x)^{n+1}} &\geq \frac{(-1)^{n+2}}{(1+x)^{n+1}} \\ \iff \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{n+1} &\geq (-1)^{n+2} \quad \text{car } 1+x > 0 \end{aligned}$$

Or, comme $x \in]0, 1[$, on a $1-x < 1+x$, donc, comme $1-x > 0$, on a $\frac{1+x}{1-x} > 1$. Ainsi, par croissance de $x \mapsto x^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{n+1} \geq 1^{n+1} \geq (-1)^{n+2}$$

Ainsi, $g^{(n)}(x) \geq 0$. Par arbitraire sur n , g est absolument monotone sur $]0, 1[$.

9) Montrer que l'application $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

/7

est absolument monotone sur $]0, 1[$. On pourra considérer $f = \ln \circ h$ et calculer f' .

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a évidemment $h(x) > 0$, donc $f = \ln \circ h$ est bien définie sur $]0, 1[$, et de plus

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (sur $]0, 1[$) par composée de telles fonctions. De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} \\ &= \frac{1}{2}g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a immédiatement

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2}g^{(n)}(x)$$

Or, comme g est absolument monotone par la question précédente, on en déduit que $f^{(n+1)}(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, vu $\sqrt{1-x^2} \leq 1$, on a $h \geq 1$, de sorte que $f^{(0)} = f = \ln \circ h \geq 0$. Ainsi, f est absolument monotone sur $]0, 1[$. Par la question 4, on en déduit que

$$e^f = e^{\ln \circ h} = h$$

est également absolument monotone sur $]0, 1[$.

/2

- 10) En déduire que l'application arcsin est absolument monotone sur $]0, 1[$.

arcsin est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = h(x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\arcsin^{(n+1)}(x) = h^{(n)}(x) \geq 0$$

car h est absolument monotone par la question 8. De plus,

$\arcsin^{(0)} = \arcsin$ est positive sur $]0, 1[$. Ainsi, arcsin est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Partie C – Prolongement d'une application absolument monotone

/13

On suppose que $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est absolument monotone sur $]a, b[$.

- 11) Montrer que f est prolongeable par *continuité* en a . On note encore f la fonction ainsi prolongée. Montrer également que $f(a) \geq 0$.

/4,5

Comme $f' \geq 0$ sur $]a, b[$, f est croissante sur $]a, b[$. Ainsi (par le théorème de la limite monotone), f admet une limite à droite (finie ou infinie) en a . De plus, comme $f \geq 0$ sur $]a, b[$, f est minorée par 0 sur $]a, b[$ donc la limite est finie : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \mathbb{R}$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en a en posant

$$f(a) := \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Enfin, pour tout $x \in]a, b[$ on a $f(x) \geq 0$ donc en passant à la limite quand x tend vers a , par continuité de f :

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$$

/5

- 12) Justifier que f' admet une limite en a . En déduire que f est dérivable en a et que $f'(a) \geq 0$.

Comme f est absolument monotone sur $]a, b[$, on montrerait facilement que f' l'est aussi. Par la question précédente, la fonction f' est donc prolongeable par continuité en a . En particulier, elle admet une limite finie en a .

Alors, f est continue en a , dérivable sur $]a, b[$ et f' admet une limite (épointée) finie en a . Par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en a et

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x)$$

Enfin, comme f' est positive sur $]a, b[$, la limite ci-dessus est également positive. Donc $f'(a) \geq 0$.

/3,5 13) Est-ce que f est prolongeable par continuité en b ?

Non. Contre-exemple : la fonction h de la question 8 est absolument monotone sur $]0, 1[$, mais il est clair que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

et par conséquent, h n'est pas prolongeable par continuité en 1.

/20,5 3 Nombres de Mersenne

Soit x et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

/1,5 1) a) Déterminer un entier b tel que $x^m - 1 = (x - 1)b$

On sait que

$$x^m - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{m-1} x^k$$

donc $b = \boxed{1 + x + \dots + x^{m-1}}$ convient.

/3 b) En déduire que si $x^m - 1$ est premier, alors $x = 2$.

Supposons par l'absurde que $x \geq 3$. Par la question précédente, $x - 1$ divise $x^m - 1$. Or, on a $2 \leq x - 1$. De plus, en notant $p = x^m - 1$, on a $x - 1 \leq p - 1$ puisque $x^m > x$ car $x \geq 2$ et $m \geq 2$. Ainsi, $x - 1$ divise p alors que $2 \leq x - 1 \leq p - 1$, ce qui contredit le fait que p est premier. Contradiction. Donc $x = 2$.

/4 2) a) Soit p et q dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.

$$2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1)\ell \text{ avec}$$

$$\ell = \sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.

/4 b) En déduire que si $2^m - 1$ est premier, alors m est premier.

Supposons par l'absurde que m n'est pas premier. Alors on peut écrire $m = pq$ avec $p, q \in \llbracket 2, m - 1 \rrbracket$. Mais dans ce cas, par la question précédente, on aurait

$$2^p - 1 \mid 2^m - 1$$

or, comme $2 \leq p \leq m - 1$, on a $3 \leq 2^{p-1} < 2^m - 1$, de sorte que $2^m - 1$ admet un diviseur qui diffère de 1 et de lui-même. Donc $2^m - 1$ n'est pas premier. Contradiction. Ainsi, m est premier.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = x^n - 1$. Soit a et b dans $\mathbb{N}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de a par b . Montrer que u_r est le reste de la division euclidienne de u_a par u_b .

/8

On a $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b| = b$. D'où

$$u_a = x^a - 1 = x^{bq+r} - 1$$

(On voudrait écrire $u_a = u_b Q + u_r$ avec $Q \in \mathbb{Z}$... Faisons apparaître u_r par du $+1 - 1$!)

$$\begin{aligned} u_a &= x^{bq+r} - 1 + u_r - (x^r - 1) \\ &= x^{bq} x^r - x^r + u_r \\ &= x^r (x^{bq} - 1) + u_r \\ &= x^r ((x^b)^q - 1^q) + u_r \\ &= x^r (x^b - 1) \times \sum_{k=0}^{q-1} x^{bk} + u_r \end{aligned}$$

et donc $u_a = u_b Q + u_r$ avec $Q = x^r \sum_{k=0}^{q-1} x^{bk} \in \mathbb{Z}$. De plus, comme $r < b$ et $x \geq 2$, on a $x^r < x^b$, de sorte que $u_r < u_b$. Enfin, on a aussi $u_r \geq 0$. D'où u_r est bien le reste de la division euclidienne de u_a par u_b .

4 Une relation d'ordre sur les relations d'ordre

/17

Soit E un ensemble. On note $O(E)$ l'ensemble de toutes les relations d'ordre définies sur E . On définit la relation $\preceq$ sur $O(E)$ de la manière suivante : pour toutes relations d'ordre $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ dans $O(E)$:

$$\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2 \iff \forall x, y \in E \quad x \mathcal{R}_1 y \implies x \mathcal{R}_2 y$$

Autrement dit, si x et y sont comparables pour $\mathcal{R}_1$, ils le sont aussi pour $\mathcal{R}_2$ et dans le même sens. On dit alors que $\mathcal{R}_2$ est **plus fine** que $\mathcal{R}_1$ car elle permet de comparer plus d'éléments. Enfin, on dit que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ si pour tous $x, y \in E$, on a $x \mathcal{R}_1 y \iff x \mathcal{R}_2 y$.

/5 1) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $O(E)$.

- Soit $\mathcal{R} \in O(E)$. Montrons que $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}$. Soit $x, y \in E$. Si $x\mathcal{R}y$, alors $x\mathcal{R}y$, de sorte qu'on a bien $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}$. Ainsi, $\preceq$ est réflexive.
- Soit $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in O(E)$. On suppose que $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \preceq \mathcal{R}_1$. Montrons que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$. Soit $x, y \in E$. Montrons que $x\mathcal{R}_1y \iff x\mathcal{R}_2y$. On raisonne par double implication.
 - On suppose que $x\mathcal{R}_1y$. Alors comme $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2$, on a $x\mathcal{R}_2y$.
 - On suppose que $x\mathcal{R}_2y$. Alors comme $\mathcal{R}_2 \preceq \mathcal{R}_1$, on a $x\mathcal{R}_1y$.D'où $x\mathcal{R}_1y \iff x\mathcal{R}_2y$. Par arbitraire sur x et y , on a donc $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$. Ainsi, $\preceq$ est antisymétrique.
- Soit $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \in O(E)$. On suppose que $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \preceq \mathcal{R}_3$. Montrons que $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_3$. Soit $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}_1y &\implies x\mathcal{R}_2y && \text{car } \mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2 \\ &\implies x\mathcal{R}_3y && \text{car } \mathcal{R}_2 \preceq \mathcal{R}_3 \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_3$. D'où $\preceq$ est transitive.

Finalement, $\preceq$ est une relation d'ordre.

/5 2) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre total de $O(E)$. Montrer que si une relation $\mathcal{R}'$ est plus fine que $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.

Par hypothèse, on a donc $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}'$. Soit $x, y \in E$. Montrons que $x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}'y$. On raisonne par double implication.

- On suppose $x\mathcal{R}y$. Comme $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}'$, on a $x\mathcal{R}'y$.
- On suppose $x\mathcal{R}'y$. Comme $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
 - Si on a $x\mathcal{R}y$, alors on a montré l'implication voulue.
 - Si on a $y\mathcal{R}x$, alors comme $\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}'$, on a aussi $y\mathcal{R}'x$. Comme $x\mathcal{R}'y$ et $y\mathcal{R}'x$, on en déduit que $x = y$ (antisymétrie de $\mathcal{R}'$). De ce fait, par réflexivité de $\mathcal{R}$, on a $x\mathcal{R}y$.

Dans tous les cas, on a donc $x\mathcal{R}y$.

Finalement, on a bien $x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}'y$. D'où $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.

/7 3) Que doit vérifier une relation $\mathcal{E}$ pour être le plus petit élément de $O(E)$? Montrer que $O(E)$ admet effectivement un plus petit élément $\mathcal{E}$ et le déterminer. *Indication : $\mathcal{E}$ est donc la moins fine des relations d'ordre sur E , celle qui permet de comparer le moins d'éléments possibles...*

$\mathcal{E}$ est le plus petit élément de $O(E)$ si

$$\begin{cases} \mathcal{E} \in O(E) \\ \forall \mathcal{R} \in O(E) \quad \mathcal{E} \preceq \mathcal{R} \end{cases}$$

On pose $\mathcal{E}$ la relation d'égalité sur E , définie par

$$x\mathcal{E}y \iff x = y$$

Il s'agit clairement d'une relation d'ordre : $\mathcal{E} \in O(E)$. Montrons que pour tout $\mathcal{R} \in O(E)$, on a $\mathcal{E} \preceq \mathcal{R}$. Soit $x, y \in E$. On suppose $x\mathcal{E}y$. Montrons $x\mathcal{R}y$. Comme $x\mathcal{E}y$, on a $x = y$. Par réflexivité de $\mathcal{R}$, on a donc $x\mathcal{R}y$. D'où $\mathcal{E} \preceq \mathcal{R}$: on a donc le résultat voulu.